14/01/2019

Άσκηση Υπολογίστε

(i) $(3+2i) - (8-5i)$

Λύση: $(3+2i)-(8-5i) = (3-8)+(2+5)i = -5+7i$

(ii) $(4-2i)\cdot(1-5i) = (4\cdot 1-(-2)(-5)) + (4(-5)-2\cdot 1)i =$

$= -6-22i$

(iii) $(-2-4i)/i$ Πολλαπλ. με το συζυγή του παρονομαστή

όπου αν $z = a+bi$ με $a,b \in \mathbb{R}$, $\bar{z} = a-bi$

Άρα $\dfrac{(-2-4i)}{i} = \dfrac{(-2-4i)\bar{i}}{i\bar{i}} = \dfrac{(-2-4i)(-i)}{i(-i)} = \dfrac{(-2)(-i)-4i(-i)}{1} =$

$= \dfrac{2i+4i^2}{1} = \dfrac{2i-4}{1} = -4+2i$

Άσκηση

$\dfrac{-3+2i}{3-6i} = \dfrac{\qquad}{\qquad} = \dfrac{(-3+2i)(3+6i)}{(3-6i)(3+6i)} = \dfrac{(-9-12)+(-3\cdot 6+2\cdot 3)i}{3^2+6^2}$

$= \dfrac{-21+12}{45} = \dfrac{-7}{15} - \dfrac{4}{15}i$

Άσκηση.

Έστω $a,b \in \mathbb{R}$ ώστε $\dfrac{a+bi}{i} = 7+9i$ Υπολογίστε το $(a+bi)(a-bi)$

Λύση:

$\dfrac{a+bi}{i} = 7+9i \xRightarrow{\text{πολ/με}} a+bi = i(7+9i) \Rightarrow a+bi = -9+7i \Rightarrow$

$\begin{cases} a = -9 \\ b = 7 \end{cases}$

Αρα $(a+bi)(a-bi) = (-9+7i)(-9-7i) =$
$= (-9)^2 + (-7)^2 = 81 + 49 = 130$

Ασκηση 3

Βρειτε όλους τους μιγαδικους z με
$$z + 3\bar{z} = 5 - 6i \quad (*)$$

Λυση: Έστω $z = a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Τοτε
$(*) \Rightarrow (a+bi) + 3(a-bi) = 5 - 6i \Rightarrow 4a - 2bi = 5 - 6i$

$4a = 5$ και $-2b = -6 \Leftrightarrow a = 5/4$ και $b = 3 \Rightarrow$
$z = \frac{5}{4} + 3i$

Ασκηση

Βρειτε όλους τους μιγαδικους $z = a + bi$, με $a, b \in \mathbb{R}$
ωστε $z\bar{z} = 25$ και $a + b = 7$ (1)
$z\bar{z} = 25 \Leftrightarrow (a+bi)(a-bi) = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$ (2)
$a^2 + (7-a)^2 = 25 \Leftrightarrow 2a^2 - 14a + 24 = 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 12 = 0$
Αρα $a = 4$ ή $a = 3$, αρα για $a = 4$, $b = 7 - 4 = 3$
και $z = 4 + 3i$, ενω για $a = 3$, $b = 7 - 3 = 4$
και $z = 3 + 4i$

Γεωμετρικα: Θεωρουμε το μιγαδικο επιπεδο $\mathbb{R}^2$.

Ερωτημα: Ποιες ειναι οι εικονες στο $\mathbb{R}^2$ των $z \in \mathbb{C}$ με $z\bar{z} = 25$
Απαντηση: Απο (2) έχουμε κυκλο με κεντρο την αρχη των αξονων
και ακτινα $R = \sqrt{25} = 5$

ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιες είναι οι εικόνες στο $\mathbb{R}^2$ \ $a^2 + b^2 = 25$ (8)
των μιγαδικών $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ με $a + b = 7$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ευθεία, που περνά από τα σημεία $(7,0)$ και $(0,7)$.

ΑΣΚΗΣΗ

Βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού $i - \sqrt{3}$.

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: Έστω $z = a + bi$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε $z \neq \mathbb{R}$
Θέτουμε $\rho = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
(Γεωμετρικά, ρ είναι η απόσταση στο $\mathbb{R}^2$ του σημείου (a,b) από την αρχή των αξόνων)

Από θεωρία, υπάρχει μοναδικό $\theta \in [0, 2\pi]$ ώστε $\frac{z}{\rho} = (\text{συν}(\theta) + i\,\text{ημ}(\theta))$.

Το θ λέγεται ΟΡΙΣΜΑ του z και η τριγ. μορφή του z είναι
$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

ΛΥΣΗ: Έστω $z = i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i$
$\rho = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ Αναζητούμε $\theta \in [0, 2\pi]$
με $\frac{z}{\rho} = \text{συν}(\theta) + i\,\text{ημ}(\theta) \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \text{συν}(\theta) + i\,\text{ημ}(\theta)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{συν}(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \text{ημ}(\theta) = \frac{1}{2} \end{cases}$$